COLLEGE
Tanta Engineering

إعداد 2020

الهندسة التحليلية

مسائل النقل والدوران

م.إسراء شوقي

مسائل على نقل ودوران المحاور

نقل) Eliminate the first degree Terms from the following eqn :

$$F(x,y) = 5x^2 + 5y^2 - 6xy - 26y + 22x + 29 = 0 \Rightarrow (*)$$

∵ يطلب النقل ∴ سنحذف x، y من الدرجة الأولى

(1) وهذا يتطلب منا قوانين النقل

$F(\alpha, \beta)$ $\quad x = x' + \alpha \quad , \quad y = y' + \beta$

(2) نقوم بعمل الاشتقاق الجزئي على عدد الأشياء التي نريد حذفها بمعنى هو يريد حذف x، y ∴ مرة $\frac{\partial F}{\partial x}$ ومرة $\frac{\partial F}{\partial y}$

(3) $\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{(\alpha,\beta)} = 0 \Rightarrow 10x + 0 - 6y - 0 + 22 + 0 = 0$

والتعويض عن كل x ب α وكل y ب β

$10\alpha - 6\beta + 22 = 0$

(4) $\frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{(\alpha,\beta)} = 0 \Rightarrow 0 + 10y - 6x - 26 + 0 + 0 = 0$

$10\beta - 6\alpha + 26 = 0 \quad \Leftarrow$ بالمثل

(5) بحل المعادلتين آنياً ينتج $\Leftarrow$ $\alpha = -1 \; , \; \beta = 2$

∴ نذهب ونعوض في قوانين النقل في (1)

$x = x' - 1 \quad , \quad y = y' + 2$

(6) ثم نعوض بقوانين النقل في (5) في المعادلة (*) ونقوم بفكها

$$5(x'-1)^2 + 5(y'+2)^2 - 6(x'-1)(y'+2) - 26(y'+2) + 22(x'-1) + 29 = 0$$

بعد الفك تكون نفس المعادلة الأصلية ولكن بحذف x، y درجة أولى

ووضع بدلاً من الرقم رمز K وجعل كل x، y $\Leftarrow$ x'، y'

$$\boxed{5x'^2 + 5y'^2 - 6x'y' + K = 0}$$

⑦ لنوجد K نعوض عن α، β التي أوجدناها $(-1,2)$
في المعادلة الأصلية لأنها تحقق المعادلة

$$\therefore K = F(\alpha,\beta) = 5(-1)^2 + 5(2)^2 - 6(-1)(2) - 26(2) + 22(-1) + 29$$

بعد التعويض ينتج أن $K = -8$

$$\therefore F_{\text{الجديدة}} \Rightarrow \boxed{5x'^2 + 5y'^2 - 6x'y' - 8 = 0}$$

* عند طلبه لحذف x، y ⇐ (α , β)
* عند طلبه لحذف x فقط ⇐ $(\alpha , 0)$
* عند طلبه لحذف y فقط ⇐ $(0 , \beta)$

(دوران) Eliminate the xy Term from the eqn

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 - x + 2\sqrt{2}\,y + 10 = 0 \rightarrow (*)$$

(١) أولاً علينا كتابة قوانين الدوران (غالبا الدوران ينتج عنه حذف xy)

$x = x' \cos\theta - y' \sin\theta$, $y = y' \cos\theta + x' \sin\theta$

(٢) ثانياً قوانين الدوران تحتاج إلى زاوية (لها قانون الخاص حفظ)

$$\tan(2\theta) = \frac{2h}{a-b} \Rightarrow a = 3 , b = 3 , 2h = 2$$

$$\therefore \tan(2\theta) = \frac{2}{0} \Rightarrow \tan(2\theta) = \infty$$

$\tan(90) = \infty$

$$\therefore 2\theta = 90^\circ \Rightarrow \theta = 45 \; \begin{cases} \sin 45 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos 45 \end{cases}$$

(٣)

$$x = x' \frac{1}{\sqrt{2}} - y' \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y')$$

$$y = y' \frac{1}{\sqrt{2}} + x' \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{2}}(y' + x')$$

بالتعويض عن معادلة (٣) في المعادلة (*)

$$3 \cdot \frac{1}{2}(x' - y')^2 + \cancel{2}\frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') + 3 \cdot \frac{1}{2}(y' + x')^2$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') + 2\cancel{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}(y' + x') + 10 = 0$$

$\therefore$ بالفك

$$\frac{3}{2}x'^2 - 3x'y' - \frac{3}{2}y'^2 + x'^2 - y'^2 + \frac{3}{2}x'^2 + 3x'y' + \frac{3}{2}y'^2$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' + 2x' + 2y' + 10 = 0$$

نستنتج المعادلة الجديدة خالية من $\underline{xy}$:

$$\boxed{4x'^2 - y'^2 + 1.29x' + 2.71y' + 10 = 0}$$

نقل و دوران معاً

3

Eliminate the first degree terms (x & y) and the xy term from the eqn :

$$F(x,y) = 2x^2 + 5y^2 + 2xy + \frac{x}{\sqrt{2}} + 2\sqrt{2}\,y - 1 = 0 \rightarrow (*)$$

{ هي هذا السؤال أجبرنا على استعمال طريقتين
النقل لحذف x و y والدوران لحذف xy }

أولاً النقل :- $x = x' + \alpha \;,\; y = y' + \beta$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(\alpha,\beta)} = 0 \Rightarrow 4x + 2y + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow 4\alpha + 2\beta + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \rightarrow (1)$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(\alpha,\beta)} = 0 \Rightarrow 10y + 2x + 2\sqrt{2} = 0 \Rightarrow 10\beta + 2\alpha + 2\sqrt{2} = 0 \rightarrow (2)$$

بحل المعادلتين معاً $\alpha = -0.039 \;,\; \beta = -0.275$

∴ بعد التعويض بهما ذات النقل و الفك نحصل على

$$F(x',y') = 2x'^2 + 5y'^2 + 2x'y' + K = 0$$

$K = F(-0.039, -0.275) \Longrightarrow$ بعد التعويض به في $(*)$ $\Rightarrow K = -1.403$

$$\boxed{\therefore F(x',y') = 2x'^2 + 5y'^2 + 2x'y' - 1.403 = 0}$$

ونبدأ نشتغل من هنا على الدوران لاستخراج θ

$$\theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2h}{a-b}\right) = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2}{-3}\right)$$

$a = x'^2 = 2$
$b = y'^2 = 5$
$2h = x'y' = 2$

$$\therefore \theta = -16.8^\circ + \underbrace{360^\circ}_{\text{لأنها سالبة}} = 343.15^\circ$$

ثم نبدأ بكتابة قوانين الدوران والتعويض فيها وكل x' تصبح x''

$x' = x''\cos\theta - y''\sin\theta = x''.B - y''.A$
$y' = x''.A + y''.B$

{ $A = \sin\theta = -0.289$
$B = \cos\theta = 0.9571$ }

ثم نعوض في معادلة $F(x', y')$

$$2(Bx'' - Ay'')^2 + 5(Ax'' + By'')^2 + 2(Bx'' - Ay'')(Ax'' + By'') - 1.403 = 0$$

$$\therefore 2B^2x''^2 - 2ABx''y'' + 2A^2y''^2 + 5A^2x''^2 + 5ABx''y'' + 5B^2y''^2 + 2ABx''^2 + 2B^2x''y'' - 2A^2x''y'' - 2ABy''^2 - 1.403 = 0$$

$$\therefore 1.697x''^2 + 5.3027y''^2 - 1.403 = 0$$

Scanned with CamScanner